Semana 1: Números Complexos 1

Estudo Histórico, Forma Algébrica, Operações e Conjugação

1 Contexto Histórico e Origens

A gênese dos números complexos remonta ao século XVI, impulsionada pelos avanços na resolução de equações algébricas. Em 1545, Gerolamo Cardano publicou a obra *Ars Magna*, difundindo a fórmula analítica para a solução de equações cúbicas. Posteriormente, seu discípulo Rafael Bombelli analisou a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ por meio da dita fórmula, obtendo a seguinte expressão contendo raízes de números negativos:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Apesar da hesitação inicial quanto ao significado físico dessas quantidades relativas a radicais pares de números negativos, Bombelli operou formalmente com essas expressões segundo as propriedades da álgebra usual, observando a seguinte relação:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \\ &= 2 + \sqrt{-121}\end{aligned}$$

A partir dessa identidade, inferiu-se que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{e, analogamente,} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Ao efetuar a soma dos termos, obteve-se:

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

Constatando-se que $x = 4$ satisfaz rigorosamente a equação de partida, a manipulação de raízes quadradas negativas ganhou aceitação gradual no meio matemático. O símbolo i foi adotado posteriormente para representar a **unidade imaginária** $\sqrt{-1}$. A aceitação plena desse conceito consolidou-se no século XIX, impulsionada pelas contribuições de Carl Friedrich Gauss ao formalizar a representação geométrica desses números no plano.

2 Representação Algébrica e Plano Complexo

Define-se como **número complexo** toda entidade da forma $z = x + yi$, em que $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

Em um sistema cartesiano bidimensional, associa-se a cada número complexo $z = x + yi$ um ponto $P(x, y)$, denominado **afixo** ou **imagem geométrica** de z. Essa correspondência bijetora entre o conjunto dos complexos $\mathbb{C}$ e o plano $\mathbb{R}^2$ dá origem ao chamado **Plano de Argand-Gauss**.

- Os pontos pertencentes ao **eixo horizontal** correspondem a elementos da forma $(x, 0) = x$, identificando-se com o conjunto dos **números reais** (eixo real).
- Os pontos pertencentes ao **eixo vertical** correspondem a elementos da forma $(0, y) = yi$, com $y \neq 0$, denominados **imaginários puros** (eixo imaginário).

As componentes x e y representam, respectivamente, a **parte real** e a **parte imaginária** de z, sendo denotadas formalmente por:

$$\mathrm{Re}(z) = x \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = y$$

A igualdade entre dois complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$ ocorre se, e somente se, suas respectivas partes reais e imaginárias forem idênticas, isto é, $x = a$ e $y = b$. Em particular, $z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Exemplificação de Operações Básicas

Exemplo 1 — Operações Elementares

Sejam os complexos $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 - i$:

a) **Adição:** $(2 + 3i) + (4 - i) = (2 + 4) + (3 - 1)i = 6 + 2i$

b) **Subtração:** $(2 + 3i) - (4 - i) = (2 - 4) + (3 - (-1))i = -2 + 4i$

c) **Multiplicação:** $(2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 8 + 10i - 3(-1) = 11 + 10i$

d) **Potenciação:** $(2 + 3i)^2 = 2^2 + 2(2)(3i) + (3i)^2 = 4 + 12i + 9(-1) = -5 + 12i$

Conjugação e Divisão

Dado um número complexo $z = x + yi$, o seu **conjugado** é dado por $\overline{z} = x - yi$. No plano de Argand-Gauss, a imagem de $\overline{z}$ reflete a de z de maneira simétrica em relação ao eixo real.

O produto de z pelo seu conjugado resulta em um valor real não negativo:

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

Essa propriedade permite racionalizar denominadores complexos, viabilizando o cálculo do quociente de dois números complexos.

Exemplo 2 — Divisão de Complexos

Efetue a divisão de $2 + 3i$ por $4 - i$:

$$\frac{2 + 3i}{4 - i} = \frac{(2 + 3i)(4 + i)}{(4 - i)(4 + i)} = \frac{8 + 2i + 12i + 3i^2}{16 - i^2} = \frac{5 + 14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$$

Comportamento Periódico das Potências de i

As potências de expoente inteiro da unidade imaginária apresentam periodicidade de ordem 4:

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i$$
$$i^4 = 1 \qquad i^5 = i \qquad i^6 = -1 \qquad i^7 = -i$$

De forma geral, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, tem-se $i^{n+4} = i^n$. Para determinar i^n, efetua-se a divisão euclidiana do expoente n por 4, obtendo $n = 4q + r$ com $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Segue que:

$$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$$

Exemplo 3 — Aplicação de Potências de i

Simplifique a potência $i^{1999945347}$.
Solução: Pelo critério de divisibilidade por 4, analisa-se o resto da divisão do número formado pelos dois últimos algarismos (47) por 4. Como $47 = 4(11) + 3$, o resto é $r = 3$. Portanto:

$$i^{1999945347} = i^3 = -i$$

Exemplo 4 — Equação no Campo Complexo

Resolva a equação quadrática $z^2 - 2z + 2 = 0$.
Solução: Aplicando a fórmula quadrática:

$$z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Exemplo 5 — Raízes Quadradas de um Complexo

Determine as raízes quadradas de $3 - 4i$.
Solução (Método Algébrico): Procura-se $z = x + yi$ tal que $z^2 = 3 - 4i$.

$$(x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = 3 - 4i$$

Obtém-se o sistema real:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

Isolando $y = -\frac{2}{x}$ e substituindo na primeira equação, chega-se a $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. As raízes reais para x são $x = \pm 2$.

- Para $x = 2 \implies y = -1$, obtendo-se $z_1 = 2 - i$.
- Para $x = -2 \implies y = 1$, obtendo-se $z_2 = -2 + i$.

Exemplo 6 — Interpretação Geométrica

Descreva o lugar geométrico dos pontos $z = t + it^2$ com $t \in [0, 1]$.
Solução: As equações paramétricas das coordenadas são $x = t$ e $y = t^2$. Eliminando t, obtém-se a parábola $y = x^2$ restrita ao intervalo $x \in [0, 1]$.

3 Propriedades Fundamentais da Conjugação

Teorema 1 — Propriedades do Conjugado

Para quaisquer números complexos $z, w \in \mathbb{C}$, são válidas as seguintes relações:

i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

ii) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$

iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

iv) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, para $w \neq 0$

v) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

vi) $\overline{\overline{z}} = z$

vii) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

Demonstração da Propriedade i. Considerando $z = a+bi$ e $w = c+di$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, a soma dos complexos é dada por $z+w = (a+c)+(b+d)i$. Aplicando a definição de conjugado:

$$\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z} + \overline{w}$$

O que conclui a demonstração da propriedade i). □

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio: Volume 3*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.